# TROISIEME PARTIE
# RESOLUTION D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

## 1. Equations et systèmes d'équations

### a) Syntaxe

solve (equ, var);
solve ({equs},{vars}); dans le cas d'un système

equ est une équation ou une expression de la variable var. Lorsqu'on spécifie une expression, on résout implicitement l'équation :

expression = 0

Dans le cas d'un système, toutes les équations et toutes les variables doivent être placées dans un ensemble.

Maple recherche toutes les solutions dans R ou dans C et les place dans une séquence. On peut également affecter les solutions à une liste ou à un ensemble.

| | | |
|---|---|---|
| | nom:= [solve (equ, var)] | nom est la liste des solutions |
| ou | nom:= {solve (equ, var)} | nom est l'ensemble des solutions. Les solutions multiples ne sont représentées qu'une seule fois. |

```
> solve(syst,{x,y,z});
```

$$\{y = -3, z = 6, x = -3\}, \{y = -1, z = 0, x = 1\}$$

```
> solutions:=[solve(syst,{x,y,z})];
```

$$solutions := [\{y = -3, z = 6, x = -3\}, \{y = -1, z = 0, x = 1\}]$$

### b) Principe de la résolution

Si l'équation ou les équations comportent des paramètres autres que les variables du système, les solutions sont explicitées en fonction de ces paramètres.

Lorsqu'il y a plus d'inconnues que d'équations, Maple choisit les inconnues pour lesquelles le système est le plus facile à résoudre et considère les autres inconnues comme des paramètres.

Dans le cas des équations de degré n intervenant seules ou dans des systèmes, Maple essaye d'exprimer les solutions sous forme de radicaux, excepté lorsque le degré est supérieur à 4. Si le degré est supérieur à 4, (également pour le degré 4 si les solutions sont très compliquées), on cherche à factoriser au maximum l'équation à résoudre et on donne les solutions sous forme de RootOf, c'est à dire **des solutions qui ne sont pas explicitées**, mais dont on connaît l'équation qu'elles vérifient et les relations qui existent entre elles.

Lorsque l'équation contient des coefficients en virgule flottante, ceux-ci sont traduits en leur valeur rationnelle approchée avant la résolution.

Dans certains cas, on utilise également la représentation complexe sous forme trigonométrique.

**Exemples :**

**> solve(x**2+a=0,x);**

$$\sqrt{-a},\ -\sqrt{-a}$$

**> p:=x*(x-a)*(x**4-2*x+3)*(x**2-1);**

$$p := x(x-a)\,(x^4-2x+3)\,(x^2-1)$$

**> q:=expand(p);**

$$q := x^8 - x^6 - 2x^5 + 2x^3 + 3x^4 - 3x^2 - ax^7 + ax^5 + 2ax^4 - 2ax^2 - 3ax^3 + 3ax$$

**> s:=[solve(q,x)];**

$$s := [0,\ 1,\ -1,\ RootOf(\_Z^4 - 2\_Z + 3), a]$$

**> solve(x**7-1,x);**

$$1, \cos\left(\frac{2}{7}p\right) + I\cos\left(\frac{3}{14}p\right), -\cos\left(\frac{3}{7}p\right) + I\cos\left(\frac{1}{14}p\right),$$
$$-\cos\left(\frac{1}{7}p\right) + I\cos\left(\frac{5}{14}p\right), -\cos\left(\frac{1}{7}p\right) - I\cos\left(\frac{5}{14}p\right),$$
$$-\cos\left(\frac{3}{7}p\right) - I\cos\left(\frac{1}{14}p\right), \cos\left(\frac{2}{7}p\right) - I\cos\left(\frac{3}{14}p\right)$$

Dans ce cas, l'instruction solve fournit toutes les solutions, les racines complexes étant exprimées en fonction de $\cos\left(\frac{J.\pi}{14}\right)$, bien que le degré soit > 4.

**> solve(x**8-1,x);**

$$1, \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}, I, -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{2}, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}, -I, \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{2}$$

fournit toutes les solutions e n utilisant des radicaux.

**> solve(tan(x)=x);**

$$0$$

ne donne que la racine évidente x = 0.

**> solve(ln(x)+ln(x+2)=1,x);**

$$-1 + \sqrt{1+e},\ -1 - \sqrt{1+e}$$

Le calcul du logarithme d'un nombre négatif ne pose pas de problème dans l'ensemble C.

**c) Recherche de solutions entières**

isolve (equ, var)
isolve ({equs},{vars})

Cette instruction recherche toutes les solutions entières si elles existent.

S'il n'y a pas de solutions, Maple renvoie une séquence vide (il vaut mieux utiliser une liste parce qu'une séquence vide ne s'affiche pas à l'écran).

**d) Nombre et classement des solutions**

Le nombre maximum de solutions calculées peut être limité par une variable d'environnement maxsols. Cette variable est initialisée à 100 et peut être fixée par l'opérateur.

Il n'y a pas de classement défini des solutions. Lorsque les solutions sont placées dans une liste, on trouvera toutes les solutions multiples, mais celles-ci peuvent ne pas se suivre dans la liste.

La multiplicité des solutions est un paramètre qui n'est pas accessible directement.

Lorsque les solutions sont placées dans un ensemble, on perd complètement la multiplicité des solutions.

Realroot (poly, inf..sup) donne les racines réelles d'un polynôme dans l'intervalle inf..sup.

**e) Résolution numérique d'une équation ou d'un système**

On utilise l'instruction :

fsolve (eq, var, options)
fsolve ({eqs},{vars}, options)

La résolution est effectuée en virgule flottante, par défaut dans l'ensemble des réels. Pour les systèmes, il faut autant d'équations que d'inconnues.

Les options peuvent être :

| | | |
|---|---|---|
| | complex | calcul dans C |
| | maxsols:= n | calcul des n premières solutions |
| | var = inf..sup | calcul des solutions dans l'intervalle spécifié |
| ou | {var1 = inf1..sup1, var2 = inf2..sup2} | |

Cette instruction spécifie le ou les domaines dans lesquels les solutions sont calculées. On peut toujours faire un graphe pour localiser ces solutions.

**Exemple : Equation x = tan(x)**

L'option maxsols ne donne pas toujours le résultat escompté. Ici on a programmé une boucle en faisant varier l'intervalle des solutions par pas de π.

```
> for j from -1 to 20 by 2 do    fsolve(x=tan(x),x,x=j*Pi/2..(j+2)*Pi/2)  od;
```

$$0$$
$$4.493409458$$
$$7.725251837$$
$$10.90412166$$
$$14.06619391$$
$$17.22075527$$
$$30.37130296$$
$$23.51945250$$
$$26.66605426$$
$$29.81159879$$
$$32.95638904$$

**f) Cas particuliers des systèmes linéaires**

Données sous forme matricielle

| | |
|---|---|
| with(linalg) | chargement du paquetage d'algèbre linéaire |
| linsolve(mat, vect, rang) | |

On résout l'équation matricielle :

(mat) × (vecsol) = (vect)

mat est la matrice du système (carrée). vecsol et vec sont des vecteurs.

Ces deux objets peuvent également être des matrices rectangulaires de même nombre de colonnes que la matrice du système (mat).
Dans ce cas, on résout le système successivement pour chaque colonne du vecteur vec et les solutions sont écrites dans les colonnes correspondantes de la matrice vecsol.

**g) Résolutions de récurrences**

rsolve({récurrence, premiers termes}, var)

permet d'exprimer le terme général d'une suite connaissant la relation de récurrence et un ou plusieurs termes initiaux.

**Exemple**

```
> rsolve({u(n)=2*u(n-1)+u(n-2),u(0)=0,u(1)=2},u);
```

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}\left(-\frac{1}{-\sqrt{2}+1}\right)^{n}}{-\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{n}$$

retourne le terme général de la suite.

## 2. Inéquations

On utilise la même instruction que pour résoudre des équations.

solve (ineq, var)

Le résultat est donné sous forme d'une séquence d'ensembles, chaque ensemble contenant une séquence d'inégalités qui décrivent les intervalles de la variable qui satisfont l'inéquation.

```
> solve(x**3+2*x-3<1+4*x-3*x**2,x);
```

$$\{x < -1 - \sqrt{5}\},\{x < -1 + \sqrt{5}, -1 < x\}$$

La version 3 de Maple ne permet pas la résolution de systèmes d'inéquations, mais on peut associer des inéquations à des équations au moyen des domaines d'existence des solutions dans fsolve.

fsolve $((x^2 - 1)(x^2 - 5), x, x = 0..\text{infinity})$

équivaut à :

fsolve $(\{(x^2 - 1)(x^2 - 5) = 0, x > 0\}, x)$

```
> fsolve((x**2-1)*(x**2-5)=0,x,x=0..infinity);
```

$$1.,2.236067978$$

La version 4 de Maple permet la résolution au moyen d'un paquetage spécialisé avec affichage graphique des domaines de validité du système d'inéquations.