Eléments d'algèbre

[1]Université de Strasbourg

Strasbourg,9 octobre 2014

Introduction

- Structures algébriques
- groupes
- Exemples d'espaces vectoriels
- Définition et propriétées des espaces vectoriels
- tenseurs
- Tenseurs d'ordre 2 : les matrices
- Propriétés des matrices et algèbre matricielle
- Conclusion

Pourquoi un cours d'algèbre ?

L'**algèbre** est le domaine des mathématiques qui concerne la définition et la manipulation des objets possédant une structure mathématiques.

Support de cours : Maple

Maple est un logiciel de calcul formel. Il sera l'outil qui illustrera les concepts mathématiques abordés cette année. Maple permet de manipuler des objets mathématiques

Support de cours : Maple

Maple est un logiciel de calcul formel. Il sera l'outil qui illustrera les concepts mathématiques abordés cette année. Maple permet de manipuler des objets mathématiques Apprendre à utiliser Maple est très similaire à un cours d'algèbre élémentaire.

Notion d'ensemble

Definition

Un **ensemble** est une collection d'objets.

Notion d'ensemble

Definition

Un **ensemble** est une collection d'objets.

Example

- les nombres réels
- les nombres premiers
- les molécules d'une chimiothèque
- les sites webs dont l'accès est monitoré dans la salle info
- les livres de la bibliothèques
- les tresses de votre petite soeur

Structure algébrique

Definition

Une **structure algébrique** est un ensemble munis de règles permettant de mettre en relation et de **combiner** les objets les uns avec les autres.

Structure algébrique

Definition

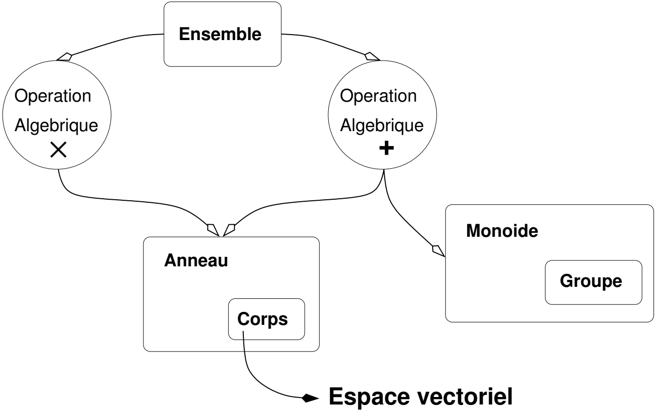
Une **structure algébrique** est un ensemble munis de règles permettant de mettre en relation et de **combiner** les objets les uns avec les autres.

On distingue :

les **loi de combinaison interne** : les règles combinant les éléments d'un même ensemble

les **loi de combinaison externe** : les règles combinant les éléments de plusieurs ensembles

Hiérarchie des structures algébriques



Hiérarchie des structures algébriques

- **Ensemble** : collection d'éléments.
  - Exemple : *tableau périodique des éléments.*

Hiérarchie des structures algébriques

- **Ensemble** : collection d'éléments.
  - Exemple : *tableau périodique des éléments.*
- **Monoïde** : Ensemble muni d'une opération de composition interne associative et d'un élément neutre.
  - Exemple : *recherche de sous-structure.*

Hiérarchie des structures algébriques

- **Ensemble** : collection d'éléments.
  - Exemple : *tableau périodique des éléments.*
- **Monoïde** : Ensemble muni d'une opération de composition interne associative et d'un élément neutre.
  - Exemple : *recherche de sous-structure.*
- **Groupe** : monoïde dont tous les éléments sont inversibles.
  - Exemple : *les rotations*

Hiérarchie des structures algébriques

- **Ensemble** : collection d'éléments.
  - Exemple : *tableau périodique des éléments.*
- **Monoïde** : Ensemble muni d'une opération de composition interne associative et d'un élément neutre.
  - Exemple : *recherche de sous-structure.*
- **Groupe** : monoïde dont tous les éléments sont inversibles.
  - Exemple : *les rotations*
- **Anneau** : Ensemble muni d'une loi de composition interne formant un groupe commutatif **et** d'une loi de composition interne associative et distributive par rapport à la première.
  - Exemple : *les nombres entiers*

Hiérarchie des structures algébriques

- **Ensemble** : collection d'éléments.
  - Exemple : *tableau périodique des éléments.*
- **Monoïde** : Ensemble muni d'une opération de composition interne associative et d'un élément neutre.
  - Exemple : *recherche de sous-structure.*
- **Groupe** : monoïde dont tous les éléments sont inversibles.
  - Exemple : *les rotations*
- **Anneau** : Ensemble muni d'une loi de composition interne formant un groupe commutatif **et** d'une loi de composition interne associative et distributive par rapport à la première.
  - Exemple : *les nombres entiers*
- **Corps** : Anneau dont la second loi de composition interne constitue également un groupe -sauf pour l'élément neutre de la première loi.
  - Exemple : *les nombre rationnels*

Les monoïdes

Definition

ensemble algébrique doit la loi répond est *stable*,*associative* et accepte un élément *neutre*.

E est un monoïde si :

- xy appartient à E pour tout x et y dans E.
- $x(yz) = (xy)z$ pour tout x, y et z dans E.
- Il existe e dans E tel que $ex = xe = x$ pour tout x dans E.

Les groupes

Definition

Un ensemble non vide G qui possède une loi ayant les propriétés suivantes :

- $(xy)z = x(yz)$ pour tout x, y et z dans G.
- Il existe e dans G tel que $ex = xe = x$ pour tout x dans G.
- Il existe un y dans G tel que $xy = xy = e$ pour tout x dans G.

Les anneaux

Definition

A un ensemble non vide et muni de deux opérations appelées *somme* et *produit*. Ces opérations possèdent les propriétées suivantes :

- la *somme* est commutative.
- $x(yz) = (xy)z = xyz$ pour tout x, y et z dans A.
- Il existe e dans A tel que $ex = xe = x$ pour tout x dans A.
- $x(y+z) = xy + xz$ et $(x+y)z = xz + yz$ pour tout x, y et z dans A.

Les corps

Definition

Un corps est un anneau dont le produit respecte des conditions supplémentaires :

- le produit est commutatif.
- Tout élément de différent de 0 admet un inverse pour le *produit*.

Groupes ponctuels de symetries

Definition

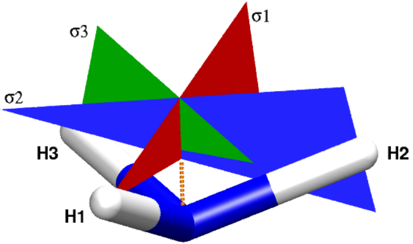
groupe ponctuel de symétrie : groupe de transformations de l'espace conservant les distances et laissant au moins un point invariant.

Example

La molécule NH_3 est invariante par application des transformations du groupe C_{3v}.

Groupes ponctuels de symetries : exemple

La mlécule possède un axe de rotation (C_3), et trois plans de symétrie ($^{i}\sigma$).

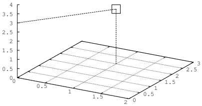


Groupes ponctuels de symetries

L'algèbre des symétries de la molécule est résumée dans une table de multiplication suivante.

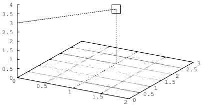
C_{3v}	1	${}^1C_3$	${}^2C_3$	${}^1\sigma$	${}^2\sigma$	${}^3\sigma$
1	1	${}^1C_3$	${}^2C_3$	${}^1\sigma$	${}^2\sigma$	${}^3\sigma$
${}^1C_3$	${}^1C_3$	${}^2C_3$	1	${}^3\sigma$	${}^1\sigma$	${}^2\sigma$
${}^2C_3$	${}^2C_3$	1	${}^1C_3$	${}^2\sigma$	${}^3\sigma$	${}^1\sigma$
${}^1\sigma$	${}^1\sigma$	${}^2\sigma$	${}^3\sigma$	1	${}^1C_3$	${}^2C_3$
${}^2\sigma$	${}^2\sigma$	${}^3\sigma$	${}^1\sigma$	${}^2C_3$	1	${}^1C_3$
${}^3\sigma$	${}^3\sigma$	${}^1\sigma$	${}^2\sigma$	${}^1C_3$	${}^2C_3$	1

Exemples d'espaces vectoriels

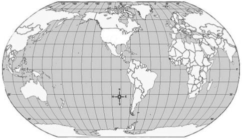


3D Euclidien

Exemples d'espaces vectoriels

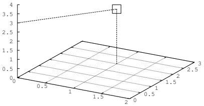


3D Euclidien

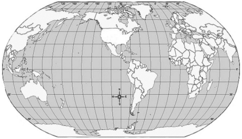


2D sphérique

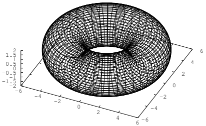
Exemples d’espaces vectoriels



3D Euclidien

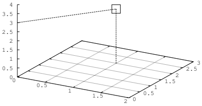


2D sphérique

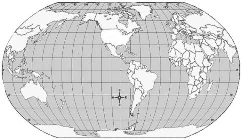


2D torique

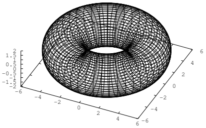
Exemples d'espaces vectoriels



3D Euclidien



2D sphérique



2D torique

Example

- les polynomes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$
- les équations différentielles
- ...les particules élémentaires ?

Définition d'un espaces vectoriel

Definition

Un espace vectoriel est en ensemble dont les éléments sont nommés des **vecteurs**.

Une loi de composition interne (l' addition) régit les interactions entre **vecteurs** :

- $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$

Définition d'un espaces vectoriel

Definition

Un espace vectoriel est en ensemble dont les éléments sont nommés des **vecteurs**.

Une loi de composition interne (l' addition) régit les interactions entre **vecteurs** :

- $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$
- $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$

Définition d'un espaces vectoriel

Definition

Un espace vectoriel est en ensemble dont les éléments sont nommés des **vecteurs**.

Une loi de composition interne (l' addition) régit les interactions entre **vecteurs** :

- $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$
- $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$
- il existe un vecteur noté $\vec{0}$ tel que $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$

Définition d’un espaces vectoriel

Definition

Un espace vectoriel est en ensemble dont les éléments sont nommés des **vecteurs**.

Une loi de composition interne (l’ addition) régit les interactions entre **vecteurs** :

- $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$
- $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$
- il existe un vecteur noté $\vec{0}$ tel que $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$
- Pour tout $\vec{x}$, il existe un vecteur noté $-\vec{x}$ tel que $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$

Définition d'un espaces vectoriel : loi externe

Une loi externe (la multiplication), définit les interactions entre les vecteurs et les **scalaires** :

- $\lambda_1(\lambda_2\vec{x}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{x}$

Définition d'un espaces vectoriel : loi externe

Une loi externe (la multiplication), définit les interactions entre les vecteurs et les **scalaires** :

- $\lambda_1(\lambda_2\vec{x}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{x}$
- $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{x} = \lambda_1\vec{x}+\lambda_2\vec{x}$

Définition d'un espaces vectoriel : loi externe

Une loi externe (la multiplication), définit les interactions entre les vecteurs et les **scalaires** :

- $\lambda_1(\lambda_2\vec{x}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{x}$
- $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{x} = \lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{x}$
- $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$

Définition d'un espaces vectoriel : loi externe

Une loi externe (la multiplication), définit les interactions entre les vecteurs et les **scalaires** :

- $\lambda_1(\lambda_2\vec{x}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{x}$
- $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{x} = \lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{x}$
- $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
- il existe un scalaire noté 1 tel que $1\vec{x} = \vec{x}$

La structure dans laquelle les scalaires prennent leurs valeurs est le **support** de l'espace vectoriel.

Espaces vectoriels de n-uplet et de polynômes

Considérer les n-uplets (en pratique n=3) $\vec{x}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ muni d'une structure d'espace vectoriel. Les scalaires λ ont valeur dans $\mathbb{R}$ également.
Vérifier que :

- $\vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$
- $(\vec{x} + \vec{y}) - (\vec{y} + \vec{x}) = \vec{0}$
- $((\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}) - (\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})) = \vec{0}$

Espaces vectoriels de n-uplet et de polynômes

Vérifier que :

- $\lambda_1(\lambda_2\vec{x}) - (\lambda_1\lambda_2)\vec{x} = \vec{0}$
- $((\lambda_1 + \lambda_2)\vec{x}) - (\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{x}) = \vec{0}$
- $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) - (\lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}) = \vec{0}$
- $1\vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$

Example

Les coordonnées repérant les points dans l'espace forment un espace vectoriel.

Espaces ponctuel

Definition

Un **espace ponctuel** E_p est un espace de points qui fait correspondre à chaque couple ordonné de points un vecteur appartenant à un espace vectoriel E_v :
$(A, B) \in E_p \to \vec{x} = \vec{AB} \in E_v$.

Example

L'espace, au sens commun, est représenté par un espace ponctuel.

Propriétés des Espaces ponctuel

- $\vec{AB} = -\vec{BA}$
- $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$
- Pour un point fixe $O \in E_p$, à tout vecteur de E_v correspond un seul point $M \in E_p$ tel que $\vec{x} = \vec{OM}$.

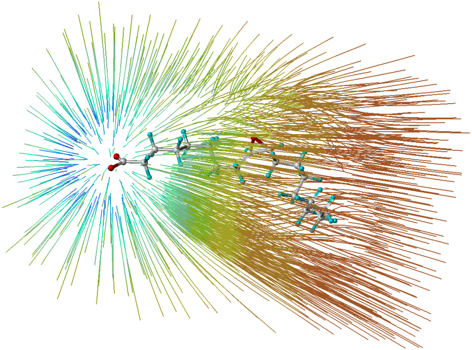
L'image d'une application reliant un espace ponctuel à un espace vectoriel est un **champs de vecteur**.

Example

Par exemple :

- carte de température
- champs de vitesse d'un fluide
- champs électro-magnétique
- champs gravitationel

Illustration d'un champ de vecteur dans un espaces ponctuel 3D



Le champs électrostatique d'une molécule est ici représenté par ses lignes de champs.

Base d'un espace vectoriel

Definition

Une **base** d'un espace vectoriel est un ensemble E_b de taille maximale de vecteurs tel que si $\sum_{\vec{e}_i \in E_b} \lambda^i \vec{e}_i = \vec{0}$, alors tous les scalaires $\lambda^i = 0$. Pour un espace ponctuel, la donnée d'une base et d'un point fixe constitue un **repère**.

Les vecteurs de la base sont notés usuellement $\vec{e}_i$.

Dimension d'un espace vectoriel

Definition

La taille de E_b, le nombre de vecteurs qu'il contient, est la **dimension** de l'espace vectoriel.

Tout vecteur de l'espace vectoriel peut être décomposé de façon unique sur une base :

$$\vec{x} = \sum_{\vec{e}_i \in Eb} \lambda^i \vec{e}_i$$

Les scalaires λ^i sont appelés les **composantes** du vecteur $\vec{x}$ sur E_b.

Dimension d’un espace vectoriel : commentaire

Les dimensions d’un espace vectoriel et le repère d’un espace ponctuel sont le plus souvent postulées.

La définition rationelle de ces objets est le plus souvent très subtile :

Dimension d'un espace vectoriel : commentaire

Les dimensions d'un espace vectoriel et le repère d'un espace ponctuel sont le plus souvent postulées.

La définition rationelle de ces objets est le plus souvent très subtile :

- Copernic et Galilé définirent le repère terrestre.

Dimension d'un espace vectoriel : commentaire

Les dimensions d'un espace vectoriel et le repère d'un espace ponctuel sont le plus souvent postulées.

La définition rationelle de ces objets est le plus souvent très subtile :

- Copernic et Galilé définirent le repère terrestre.
- Einstein découvrit que l'univers pouvait posséder plus que 3 dimensions.

Composantes covariantes et contravariantes

La définition d'une base sur un espace vectoriel n'est pas unique.

Les vecteurs d'une base E_b se décomposent sur base $E_{b'}$:

$$\vec{e}_i = \sum_{\vec{e'}_k \in E_{b'}} A_i^k \vec{e'}_k$$

Composantes covariantes et contravariantes

La définition d'une base sur un espace vectoriel n'est pas unique.

Les vecteurs d'une base E_b se décomposent sur base $E_{b'}$:

$$\vec{e}_i = \sum_{\vec{e'}_k \in E_{b'}} A_i^k \vec{e'}_k \qquad \vec{e'}_k = \sum_{\vec{e}_i \in E_b} A'^i_k \vec{e}_i$$

$\exists$ relation entre les composantes dans $E_{b'}$ et E_b :

$$\lambda'^k = \sum_i A_i^k \lambda^i$$

$$\lambda^i = \sum_k A'^i_k \lambda^k$$

Composantes covariantes et contravariantes

La définition d'une base sur un espace vectoriel n'est pas unique.

Les vecteurs d'une base E_b se décomposent sur base $E_{b'}$:

$$\vec{e}_i = \sum_{\vec{e'}_k \in E_{b'}} A_i^k \vec{e'}_k \qquad \vec{e'}_k = \sum_{\vec{e}_i \in E_b} A'^i_k \vec{e}_i$$

$\exists$ relation entre les composantes dans $E_{b'}$ et E_b :

$$\lambda'^k = \sum_i A_i^k \lambda^i$$

$$\lambda^i = \sum_k A'^i_k \lambda^k$$

Les **composantes** se transforment à l'aide des opérandes *inverses* de ceux des **vecteurs de base**.

Composantes covariantes et contravariantes

La définition d'une base sur un espace vectoriel n'est pas unique.

Les vecteurs d'une base E_b se décomposent sur base $E_{b'}$:

$$\vec{e}_i = \sum_{\vec{e'}_k \in E_{b'}} A_i^k \vec{e'}_k \qquad \vec{e'}_k = \sum_{\vec{e}_i \in E_b} A'^i_k \vec{e}_i$$

$\exists$ relation entre les composantes dans $E_{b'}$ et E_b :

$$\lambda'^k = \sum_i A_i^k \lambda^i$$

$$\lambda^i = \sum_k A'^i_k \lambda^k$$

Les **composantes** se transforment à l'aide des opérandes *inverses* de ceux des **vecteurs de base**.
Ils sont **contravariants** par opposition aux vecteurs de base qui sont **covariants**.

Produit scalaire et norme

Definition

Les **produit scalaire**, noté «.», est une opération d'un espace vectoriel vers son support, le corps des scalaires associés, tel que

- $\vec{x}.\vec{y} = \vec{y}.\vec{x}$
- $(\vec{x}+\vec{y}).\vec{z} = \vec{x}.\vec{z}+\vec{y}.\vec{z}$
- $\lambda(\vec{x}.\vec{y}) = (\lambda\vec{x}).\vec{y}$
- Si $\vec{x}.\vec{y} = 0$ pour tout $\vec{y}$, alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Example

La densité de probabilité en mécanique quantique est définie sur la base du produit scalaire de fonctions d'onde.

Espace pré-euclidien

Definition

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit **pré-euclidien**.

Si $\vec{x}.\vec{y} = 0$, alors $\vec{x}$ est **orthogonal** à $\vec{y}$.
On peut toujours trouver un base orthogonale, dans laquelle chaque vecteur de la base est orthogonal à tous les autres : $\vec{e}_i.\vec{e}_j = 0$ si $i \neq j$.

Métrique

La table des produits scalaires des vecteurs de base est seule suffisante pour calculer le produit scalaire.

$$\vec{x}.\vec{y} = (\sum_i x^i e_i)(\sum_j y^j e_j) = \sum_{i,j} x^i y^j (\vec{e}_i.\vec{e}_j)$$

Definition

La **métrique** est :

$$g_{ij} = \vec{e}_i.\vec{e}_j.$$

Norme

Definition

Une **norme**, notée $||.||$ est une opération d'un espace vectoriel vers $\mathbb{R}$, telle que :

- $||\vec{0}||$=0
- $||\lambda\vec{x}|| = \lambda||\vec{x}||$
- $||\vec{x}+\vec{y}|| \leq ||\vec{x}||+||\vec{y}||$

Example

En analyse statistique des données, les paramètres de dispersion sont reliés à la norme construite sur l'espace des mesures.

Espace pré-Hilbertien

Definition

On parle d'**espace pré-hilbertien** si la norme est définie par le produit scalaire : $||\vec{x}||^2 = \vec{x}.\vec{x}$.

Un vecteur est **normal** si sa norme est 1.
Dans le cas d'une base orthogonale, la norme s'exprime comme :

$$||\vec{x}||^2 = \sum_i (x^i)^2 g_{ii}$$

puisque les éléments hors diagonaux de la métrique sont nuls ($g_{ij} = 0 \forall i \neq j$).

Espace Euclidien

Definition

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire tel que pour tout i, $g_{ii} > 0$ est dit **Euclidien**.

Example

Le produit scalaire usuel sur les n-uplets $\vec{x}.\vec{y} = \sum_i x^i y^i$ confère à cet espace vectoriel la propriété d'être euclidien.

Espaces de Hilbert

Definition

Un **espace complet** vis-à-vis d'une métrique est un espace qui ne possède pas de «trous». Partant de n'importe quel point, on peut s'approcher infiniement près, au sens de la métrique, de n'importe quel autre point de cet espace.

Definition

Une **Espace de Hilbert** est un espace vectoriel complet pour la norme.

Examples d'Espaces de Hilbert

Les espace de Hilbert sont très communs.

Example

- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces de Hilbert
- L'espace ponctuel de la mécanique classique est un espace de Hilbert.
- Les solutions de l'équations de Schrödinger peuplent un espace de Hilbert.

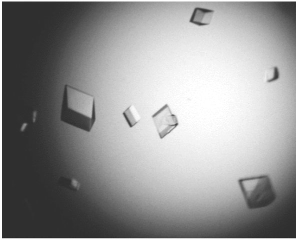
Mais $\mathbb{Q}$ n'est que pré-hilbertien.

Espace dual d'un espace vectoriel

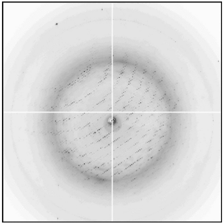
Un **espace dual** d'un espace vectoriel E est l'espace vectoriel E^* constitué par l'ensemble des applications linéaires de E sur l'espace des scalaires de E (le support de E).
Le dual du réseau crystallin est son réseau réciproque.
L'application linéaire est ici le produit scalaire : $L_{\vec{y}}(\vec{x}) = \vec{y}.\vec{x}$.

Espace dual d'un espace vectoriel

La base du dual cet se déduit de la base de l'espace vectoriel : $\vec{e}_i^* . \vec{e}_j = \delta_{ij}$. Note : l'emploie du produit scalaire est ici abusif.



réseau crystallin (crystaux d'α-glycerophosphate oxidase from *Streptococcus*)



réseau réciproque (diffraction X d'α-glycerophosphate oxidase from *Streptococcus*)

Matrices

Une matrice (réelle) A est un tableau rectangulaire de nombres. Elle est dite de taile $m \times n$ si le tableau possède m lignes et n colonnes.
Les nombres a_{ij} du tableau sont appelés les éléments ou composantes de A.

Si $n = m$, la matrice est dite carrée.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Addition des matrices

On peut définir la somme de deux matrices A et B si elles sont de même taille. On définit leur somme $C = A + B$ par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

En autres termes, on somme composante par composante.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Produit d'une matrice par un scalaire

Le produit d'une matrice A par un scalaire k est formé en multipliant chaque élément de A par k. Il est noté kA.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } k = \text{-3 donnera } kA = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$$

Remarque : $(-1)A = -A$ et $A - B = A + (-B)$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplication des matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est défini seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

$$C = AB : \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nr} \end{pmatrix}$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2m}b_{m2}$$

Multiplication des matrices

Exemples

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

1×3 $\quad 3 \times 1$ $\quad 1 \times 1$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

3×1 $\quad 1 \times 4$ $\quad 3 \times 4$

Matrice identité (unité)

La matrice carrée $n \times n$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice identité. Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0.

Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 dans l'arithmétique des scalaires. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes, soit A une matrice $m \times n$, alors

L'inversion des matrices

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$\mathrm{AB} = \mathrm{I} \text{ et } \mathrm{BA} = \mathrm{I}\,;$$

on dit que A est inversible et on appelle B un *inverse* de A.

Exemple

Les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ sont inverses.

On a

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La transposition des matrices

Soit A une matrice de taille $m \times n$. On appele la matrice transposée de A, la matrice A^T de taille $n \times m$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} ; A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, la i-ème colonne de A^T est la i-ème ligne de A, ou encore :$a^T_{ij} = a_{ji}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

La trace

On appelle trace de A, et on note $trace(A)$, le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$$trace(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Alors $trace(A) = 2 + 5 = 7$ et $trace(B) = 1 + 2 - 10 = -7$.

Le produits élémentaires

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Un *produit élémentaire* de A est le produit de n éléments de A, choisis de façon qu'aucun couple d'entre eux ne provienne de la même ligne ou de la même colonne. Tous les éléments du produit sont dans des lignes et des colonnes différentes.

Les produits élémentaires signés de

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

sont $a_{11}a_{22}a_{33}, -a_{11}a_{23}a_{32}, -a_{12}a_{21}a_{33}, a_{12}a_{23}a_{31}, a_{13}a_{21}a_{32}$ et $-a_{13}a_{22}a_{31}$

Le déterminant d'une matrice

Le déterminant $det(A)$ d'une matrice A est la somme de tous les produits élémentaires signé de A.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ; det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Si A est une matrice ayant une ligne formée de zéros, alors $det(A) = 0$.
- Soit A une matrice avec deux lignes égales. Alors $det(A) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} ;$$

$det(A) = abf - abf + ace - ace + bcd - bcd = 0$

Valeur propre et vecteur propre

Soit A une matrice carrée $n \times n$; $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Ax = \lambda x$.
Le scalaire λ est la valeur propre de A et x en est un vecteur propre associé.
$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax = \lambda x I \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$
$\exists$ une solution non triviale si $det(A - \lambda I) = 0$.

Valeur propre et vecteur propre : exemple de calcul

Exemple

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 28; \qquad \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28 = 0$ Les solutions sont $\lambda = 1$, $\lambda = 4$, $\lambda = 7$, les vecteurs propres sont : $\lambda = 1 : x = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$; $\lambda = 4 :$ $x = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$; $\lambda = 7 : x = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

Règles du calcul matriciel

Sous l'hypothèse que les tailles des matrices soient compatibles avec les opérations indiquées, on a les règles suivantes :

- Commutativité de la somme : $A + B = B + A$
- Associativité de la somme : $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Associativité du produit : $A(BC) = (AB)C$
- Distributivité du produit par rapport à la somme : $A(B + C) = AB + AC$
- $A + 0 = A$
- $AI = IA = A$
- $A \times 0 = 0$

ATTENTION ! Le produit des matrices n'est pas nécessairement commutatif. On peut avoir $AB \neq BA$

Règles de la transposition

L'opération de transposition obéit aux règles suivantes :

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB) = B^T A^T$
- $(A^T)^T = A$
- Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ qui sera notée A^{-T}.

Remarques sur les matrices

Les **matrices** sont des tableaux à 2 dimension munis d'une structure d'espace vectoriel.
Elles sont munies d'une opération suplémentaire : la **réduction d'indice** ou **multiplication matricielle**.

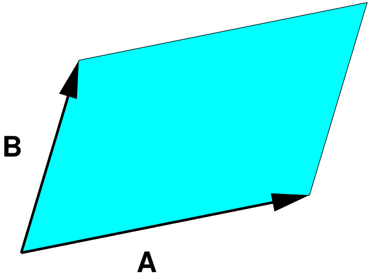
$$A^i_j = \sum_k B^i_k C^k_j ; x^i = \sum_i A^i_j y^j$$

Cette loi combine les éléments des matrices ou les composantes des vecteurs. Elle permet de combiner des matrices avec des matrices, des matrices avec des vecteurs, etc...
L'**inverse**, $[A^{-1}]$, d'une matrice $[A]$ est telle que la produit matricile $[A^{-1}][A] = [1]$, la matrice unité.

Remarques sur des opérations matricielles

Dans le cas d'une matrice á éléments dans $\mathbb{C}$, l'opération de **conjugaison** est analogue à l'opération de **transposition**, les éléments de matrice étant simplement congués.

Le déterminant s'interprète comme la surface ou le volume de la forme géométrique générée par deux vecteurs de dimension 2 ou trois vecteurs de dimension 3, etc.



Remarques sur des opérations matricielles

Un tableau rempli par colonne des composantes de 3 vecteurs à 3 dimensions constitue une matrice, dont le déterminant $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est appelé **produit mixte** : $(\vec{x} \wedge \vec{y}).\vec{z}$. Le vecteur noté $\vec{x} \wedge \vec{y}$ est nommé produit vectoriel de $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Il n'existe que pour 3 dimensions.

matrices particulières 1

Une matrice dont les deux dimensions sont égales est dite **carrée**.

La **matrice nulle** n'est composée que de 0.

La **matrice unitée** est une matrice ne possédant que des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

Une matrice carrée dont les éléments sont invariants par l'opération de transposition est **symétrique** : $A^i_j = A^j_i$.

Une matrice carrée dont les éléments sont inversés par l'opération de transposition est **anti-symétrique** : $A^i_j = -A^j_i$.

Une matrice carrée dont les éléments sont invariants par l'opération de conjugaison est **hermitienne** : $A^i_j = A^{*i}_j$

matrices particulières 2

Une matrice dont l'inverse est sa transposée est **orthogonale**.
Une matrice dont l'inverse est la conjuguée est **unitaire**.
Une matrice $[M]$ est **définie positive** si $\vec{x}.([M]\vec{x}) > 0$ quelque soit $\vec{x}$.
Une matrice **diagonale**, n'a d'éléments que sur la diagonale.
Une matrice **bande** n'a déléments non nuls que sur la diagonale et les éléments voisins de la diagonale.
Une matrice **triangulaire supérieure (inférieure)** n'a d'éléments non nuls que sur la diagonale et sur les éléments situés au dessus (au dessous).
Une matrice **creuse**, matrice dont une grande partie des éléments sont nuls.

Autres exemples de matrice

La matrice d'inertie :

$$\begin{pmatrix} \sum_k m_k((x_k^2)^2+(x_k^3)^2) & -\sum_k m_k x_k^1 x_k^2 & -\sum_k m_k x_k^1 x_k^3 \\ -\sum_k m_k x_k^1 x_k^2 & \sum_k m_k((x_k^1)^2+(x_k^3)^2) & -\sum_k m_k x_k^2 x_k^3 \\ -\sum_k m_k x_k^1 x_k^3 & -\sum_k m_k x_k^2 x_k^3 & \sum_k m_k((x_k^1)^2+(x_k^2)^2) \end{pmatrix}$$

Représente l'énergie stockée dans les mouvements de rotation.

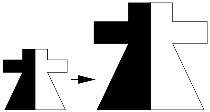
La matrice électrostatique quadrupolaire :

$$\frac{1}{2R^5}\begin{pmatrix} -\sum_k q_k((x_k^2)^2+(x_k^3)^2) & \sum_k q_k x_k^1 x_k^2 & \sum_k q_k x_k^1 x_k^3 \\ \sum_k q_k x_k^1 x_k^2 & -\sum_k q_k((x_k^1)^2+(x_k^3)^2) & \sum_k q_k x_k^2 x_k^3 \\ \sum_k q_k x_k^1 x_k^3 & \sum_k q_k x_k^2 x_k^3 & -\sum_k q_k((x_k^1)^2+(x_k^2)^2 \end{pmatrix}$$

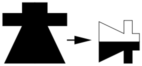
Représente la contribution au potentiel électrostatique à longue distance d'une distribution de charge globalement neutre et faiblement polarisée.

Remarques sur les vecteurs propres et valeurs propres

La multiplication matricielle d'une matrice et d'un vecteur constitue une application linéaire de ce vecteur vers un autre vecteur.
Un **vecteur propre** d'une application linéaire est un vecteur dont la norme seule change par cette application. La **valeur propre** quantifie ce changement de norme.



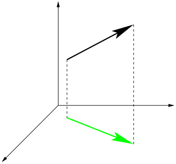
Vecteur Propre



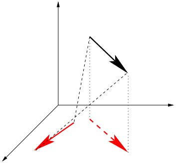
Vecteur Quelconque

Remarques sur la décomposition en valeurs singulières

Multiplier par une matrice rectangulaire, s'apparente à une opération de projection.
Si la restriction d'un vecteur de plus haute dimension à l'espace de plus basse dimension est conservée par l'opération, à la norme près, c'est le **vecteur singulier gauche**.
La **valeur singulière** quantifie le changement de la norme. Il existe aussi un **vecteur singulier droit**.



Vecteur Singulier



Vecteur Quelconque

matrices similaires et matrices équivalentes

Deux matrices carrées $[A]$ et $[B]$ sont dites **similaires** s'il existe une matrice $[P]$ orthogonale (unitaire) telle que
$[B] = [P][A][P^{-1}]$.
Deux matrices rectangulaires $[A]$ et $[B]$ de dimensions $n \times m$ sont dites **équivalentes** s'il existe deux matrices carrées $[U]$ et $[V]$ de dimensions n et m telles que $[A]$=$[V][B][U]$.
La matrice diagonale similaire (équivalente) à une matrice carrée (rectangulaire), quand elle existe, possède sur la diagonale les valeurs propres (singulières). Les colonnes de la matrice orthogonale permettant le passage sont les composantes des vecteurs propres (singuliers gauches et droits).

Applications des vecteurs propres, valeurs propres et valeurs singlières

En analyse statistique des données, les méthodes en composantes principales (**PCA**) consistent à trouver les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice de variance-covariance ou de coefficients de corrélation.

Applications des vecteurs propres, valeurs propres et valeurs singlières

En mécanique la base constituée des vecteurs propres de la matrice d'inerticie forme avec le centre de gravité, le **repère d'inertie**.

Applications des vecteurs propres, valeurs propres et valeurs singlières

En mécanique quantique, les vecteurs propres de l'hamiltonien sont les solutions stables de l'équation de Schrödinger dont l'énergie correspond aux valeurs propres.

Applications des vecteurs propres, valeurs propres et valeurs singlières

En analyse statistique des données, les décompositions en valeurs singulières (**SVD**) sont utilisées pour faire un ajustement sur des coordonnées ou bien extraire des «concepts» d'une base de donnée.

Produit tensoriel et tenseurs

Le **produit tensoriel** est une application sur les vecteurs de deux espace vectoriel E^n et E^m, de dimension n et m, vers un espace vectoriel de dimension nm, E^{nm}. Il est noté $\otimes$.
Si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E^n, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in E^m$:

- $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \otimes \vec{y} = \vec{x}_1 \otimes \vec{y} + \vec{x}_2 \otimes \vec{y}$
- $\vec{x} \otimes (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x} \otimes \vec{y}_1 + \vec{x} \otimes \vec{y}_2$
- $(\lambda \vec{x}) \otimes \vec{y} = \vec{x} \otimes (\lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \otimes \vec{y})$
- $\vec{e}_i^n$ constitue une base de E^n, $\vec{e}_j^m$ constitue une base de E^m, alors $\vec{e}_i^n \otimes \vec{e}_j^m$ constitue une base de E^{nm}.

Produit tensoriel et tenseurs

Un vecteur de E^{nm} peut donc s'écrire $\vec{f} = \sum_{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j} f^{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$. Les composantes de ces vecteurs peuvent être représentés sous la forme de tableaux. Ces tableaux sont appelés **tenseurs**. L'application de n produits tensoriels construit des tableaux de $n+1$ indices. Ce nombre définis le **rang** du tenseur.

Conclusion

Sont tenus pour acquis :

- Les rudiments de structure des espaces algébriques
- Le maniement des structures de Maple
- La notion de groupe
- La notion d'espace vectoriel
- La manipulation des vecteurs
- La notion de matrice
- La manipulation de matrices
- La notion de tenseur